ASOCIJACIJA ZA KVALITET I STANDARDIZACIJU SRBIJE

FESTIVAL KVALITETA 2008.
35. Nacionalna konferencija o kvalitetu
Kragujevac, 13. - 15. maj 2008.

KVANTITATIVNI MODELI ZASNOVANI NA EKSPONENCIJALNOJ REGRESIJI

QUANTITATIVE MODELS BASED ON EXPONENTIAL REGRESSION

Radisav Đukić(1), Milan Dobričić(1), Jelena Jovanović(1)

Rezime: *Rad tretira jedan od načina za kvantitativno (matematičko) modeliranje stohastičkih sistema na bazi poznatih stanja sistema. Pod dejstvom odabranih upravljačkih akcija model nudi skup mogućih stanja u koja sistem može da se transformiše. Na taj način omogućena je primena metoda za predviđanje, simulacije i izbor optimalne alternative.*
Ključne reči: *matematika, modeli, stohastički sistemi, predviđanje.*

Abstract: *This paper treats one of the ways of quantitative (mathematical) modeling of stochastic systems on the basis of the known states of the systems. The model offers a group of possible states in which the system could be transformed when exposed to particular managing actions. It is possible to apply methods of predicting, simulation and the choice of the optimal alternative.*
Key words: *mathematics, models, stochastic systems, prediction*

1. UVOD

Opšte prihvaćen pristup da se naučna argumentacija i dokaz za neku teorijsku postavku može dobiti samo eksperimentom dobio je naslovnu implementaciju u oblasti proučavanja organizacionih sistema. Poznato stanje pod dejstvom upravljačke akcije i uticaja okruženja transformiše se u jedno iz skupa mogućih stanja, koga u većini slučajeva ne možemo predvideti.

Osim iskustva i intuicije, narasle potrebe na polju projektovanja budućnosti uslovile su korišćenje i razvoj metoda koje na bazi stohastičkih podataka i matamatičkih modela, uz odgovarajući rizik, omogućavaju projektovanje budućih stanja u kvalitativnom smislu preslikavajući trendove iz prošlosti.

2. APROKSIMACIJA SA EKSPONENCIJALNOM REGRESIJOM ($q = a \cdot b^t$)

Životni vek svakog proizvoda ispunjen je dinamičnim promenama posmatrano kroz promenu obima proizvodnje u funkciji od vremena. Većina proizvoda prolazi kroz niz sukcesivnih faza počev od ideje, preko razvoja, proizvodnje i lansiranja na tržište pa do trenutka kada se donosi odluka o njegovom povlačenju sa tržišta i prestanku proizvodnje.

Izgled krive tj. vremensko trajanje pojedinih faza razlikuje se od proizvoda do proizvoda.

Kod „uspešnih proizvoda" životni ciklus počev od faze uvođenja na tržište pa do zrelosti proizvoda često ima eksponencijalnu zavisnost. Koristeći metode regresione i korelacione analize i aplikativni softver mathematica u radu je prikazan program za definisanje eksponencijalne zavisnosti obima proivodnje u funkciji od vremena. Na osnovu raspoloživih podataka model nam omogućava dobijanje: eksponencijalne regresione zavisnosti, vrednost zavisne promenljive u oblasti eksperimenta i oblasti predviđanja, grafički prikaz tačaka i eksonencijalnih krivih, standardnu grešku regresije, koeficijent korelacije i koeficijent elastičnosti tražnje.

1) Visoka škola tehničkih strukovnih studija Čačak, mail: vtscacak@eunet.yu

3. PROGRAM

```
KRIVOLINIJSKA  EKSPONENCIJALNA  REGRESIJA  ;
ULAZNI PODACI;
nn=5;
BROJ EKSPERIMENTALNIH TACAKA ;
X={1,2,3,4,5};                                        TACKE PO X-OSI-EKSPERIMENT;
X1={1,2,3,4,5};                                       TACKE PO X-OSI-EKSPERIMENT;
Y={1226,1112,888.3,741.2,1561.9};                     TACKE PO Y-OSI-EKSPERIMENT;
Y1={1226,1112,888.3,741.2,1561.9};                    TACKE PO Y-OSI-EKSPERIMENT;
tab={{1,1226},{2,1112},{3,888.3},{4,741.2},{5,1561.9}};   GRUPISANJE TAČAKA-EKSPERIMENT;
tab1={{1226,1},{1112,2},{888.3,3},{741.2,4},{1561.9,5}}; GRUPISANJE TAČAKA-EKSPERIMENT;
tp3={{6,529.961},{7,629.3},{8,454.2},{9,324.66},{10,291.669}};
GRUPISANJE TACAKA (PODACI ILI NULE)-PREDVIDJANJE ;
tp4={{529.961,6},{629.3,7},{454.2,8},{324.66,9},{291.669,10}};
GRUPISANJE TACAKA (PODACI ILI NULE)-PREDVIDJANJE ;
Tg=12;                          MAKSIMALNA VREDNOST PO (T)  ZA CRTANJE GRAFIKA;
Qg=1600;                        MAKSIMALNA VREDNOST PO (Q)  ZA CRTANJE GRAFIKA;
T=10;          VREMENSKI PERIOD ZA KOJI IZRACUNAVAMO ODGOVARAJUCE PARAMETRE;
m=6  ;                                                  OZNAKA ZA  FUNKCIJU;
PROGRAM;
Print["ARTIKAL X1, KRIVOLINIJSKA  EKSPONENCIJALNA  REGRESIJA "];
```

$$ma = N\left[\left\{\left\{nn, \sum_{n=1}^{nn} X[[n]]\right\}, \left\{\sum_{n=1}^{nn} X[[n]], \sum_{n=1}^{nn} X[[n]]^2\right\}\right\}, 4\right];$$

```
MatrixForm[ma];
```

$$mb = N\left[\left\{\sum_{n=1}^{nn} Log[Y[[n]]], \sum_{n=1}^{nn} X[[n]] Log[Y[[n]]]\right\}, 4\right];$$

```
MatrixForm[mb];
c=SetPrecision[LinearSolve[ma,mb],8];
Print["Parametri za definisanje funkcionalne zavisnosti q(t)=a * b^t:"];
Do[Print["c(",n,")=",c[[ n]]],{n,1,2}];
a0=c[[1]];
a1=c[[2]];
a=e^c[[1]];
b=e^c[[2]];
Print["a=",a];
Print["b=",b];
Print["Kriva eksponencijalne regresija - analiticka zavisnost aproksimativne funkcije q(t):"];
q[t_]=a  ×  b^t;
Print["q(t)=",q[t]];
Print["Numericke vrednosti q(t) za T vrednosti t=1,T,1:"];
Table[q[t],{t,1,T,1}]
```

$$\varepsilon[t\_] = \frac{t}{q[t]} \partial_t q[t];$$

```
Print["Analiticka zavisnost ε(t) funkcije ","q(t)=",q[t]," :"];
Print["ε (t)=", ε [t]]
Print["Vrednost ε (t) za T vrednosti t=1,T,1:"];
vred ε =Table[ε [t],{t,1,T,1}];
Print["ε (t)=",vred ε]
Print["Tacke u koordinatnom sistemu vreme - obim proizvodnje (t,q):"];
tabl=ListPlot[tab,PlotStyle->AbsolutePointSize[4],PlotRange->{{0,Tg},{0,Qg}}]
Print["Grafik funkcije  ","q(t)=",q[t]," :"];
s1=Plot[q[t],{t,1,Tg},PlotRange->{{0,Tg},{0,Qg}}]
Print["Tacke (t,q) i grafik funkcije ", "q(t)=",q[t]," :"];
g1=Show[tabl,s1]
Yia=Table[q[X[[n]]],{n,1,nn}];
Print["Standardna greska regresije Sq funkcije  ","q(t)=",q[t]," :"];
```

$sy=\sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{nn}(Y[[n]]-Yia[[n]])^2}{nn}}$;
Print["Sq=",sy];
Print["Srednja vrednost obima proizvodnje(Y) u oblasti eksperimenta:"];
$Ysr=\frac{\sum_{n=1}^{nn}Y[[n]]}{nn}$;
Print["qsr=",Ysr];
Print["Koeficijent korelacije (Rtq) funkcije ","q(t)=",q[t]," :"];
$Rxy=\sqrt{1-\frac{\sum_{n=1}^{nn}(Y[[n]]-Yia[[n]])^2}{\sum_{n=1}^{nn}(Y[[n]]-Ysr)^2}}$;
Print["Rtq=",Rxy];
$ma1=N\left[\left\{\left\{nn,\sum_{n=1}^{nn}Y1[[n]]\right\},\left\{\sum_{n=1}^{nn}Y1[[n]],\sum_{n=1}^{nn}Y1[[n]]^2\right\}\right\},4\right]$;
MatrixForm[ma1]
$mb1=N\left[\left\{\sum_{n=1}^{nn}Log[X1[[n]]],\sum_{n=1}^{nn}Log[X1[[n]]]\,Y1[[n]]\right\},4\right]$;
MatrixForm[mb1];
c1=N[LinearSolve[ma1,mb1],6];
Print["Parametri za definisanje funkcionalne zavisnosti t(q)=a1*b1^{q}:"];
Do[Print["c1(",n,")=",c1[[n]]],{n,1,2}];
a1=e$^{c[[1]]}$;
b1=e$^{c[[2]]}$;
Print["a1=",a1];
Print["b1=",b1];
Print["Aproksimativna kriva eksponencijalne regresije t(q):"];
t[q_]=a1 b1^{q};
Print["t(q)=",t[q]];
Print["Tacke u koordinatnom sistemu obim proizvodnje - vreme (q,t):"];
tabl2=ListPlot[tab1,PlotStyle->AbsolutePointSize[4],PlotRange->{{0,Qg},{0,Tg}}]
Print["Grafik funkcije ","t(q)=",t[q]];
s2=Plot[t[q],{q,1,Qg},PlotRange->{{0,Qg},{0,Tg}}]
Print["Tacke (q,t) i grafik funkcije ", "t(q)=",t[q]];
g2=Show[tabl2,s2]
Xia=Table[t[Y[[n]]],{n,1,nn}];
Print["Standardna greska regresije (St) funkcije ","t(q)=",t[q]," :"];
$Sx=Set\Pr ecision\left[\sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{nn}(X[[n]]-Xia[[n]])^2}{nn}},8\right]$;
Print["St=",Sx];
Print["Srednja vrednost vremena (tsr) u oblasti eksperimenta:"];
$Xsr=\frac{\sum_{n=1}^{nn}X[[n]]}{nn}$;
Print["tsr=",Xsr];
Print["Koeficijent korelacije (Rqt) funkcije ","t(q)=",t[q]," :"];
$Rxy=Set\Pr ocesion\left[\sqrt{1-\frac{\sum_{n=1}^{nn}(X[[n]]-Xia[[n]])^2}{\sum_{n=1}^{nn}(X[[n]]-Xsr)^2}},8\right]$;
Print["Rqt=",Ryx];
$\varepsilon[q\_]=\frac{q}{t[q]}\partial_q t[q]$;
Print["Analiticka zavisnost ε(q) funkcije ","t(q)=",t[q]," :"];
Print["ε (q)=", ε [q]]
Print["Vrednost ε (q) za obim proizvodnje koji odgovar t=1,nn,1 iz oblasti eksperimenta:"];
vredε2=SetPrecision[Table[ε [q[Xia[[n]]]],{n,1,nn}],8];

Print["ε (q)=",vredε2]

$$Y2[t\_]=\frac{Log\left[\frac{t}{a1}\right]}{Log[b1]};$$

Print["Vrednost ε (q) za obim proizvodnje koji odgovar funkcijalnoj zavisnosti t(q) za t=1,T,1 :"];
vredε1=SetPrecision[Table[ε [y2[t]],{t,1,T,1}],8];
Print["ε (q)=",vredε1]
Print["Prethodna funkcija t(q)=a1*b1^{q} resena po q:"];
Print["q3(t)=",y2[t]];
Print["Vrednosti aprox. funkcije q3(t) za T vrednosti t=1,T,1:"]
SetPrecision[Table[y2[t],{t,1,T,1}],8]
Print["Grafik funkcije ","q3(t)=",y2[t]," :"];
s3=Plot[y2[t],{t,1,Tg},PlotRange->{{0,Tg},{0,Qg}}]
Print["Tacke (t,q) i grafik funkcije ", "q3(t)=",y2[t]," :"];
p1=Show[tabl,s3]
Print["Ostvaren obim proizvodnje u oblasti predvidjanja t6-t10,ako postoje podaci :"];
tab3=ListPlot[tp3,PlotStyle->AbsolutePointSize[4],PlotRange->{{0,Tg},{0,Qg}}]
Print["Zajednicki grafici i tacke u koordinatnom sistemu (t,q) vreme-obim proizvodnje:
tacke{(t_i,q_i),i=$\overline{1,10}$},funkcija q(t) i nova funkcija q3(t) tj.y2[t] dobijena resavanjem funkcije t(q) po q:"];
p2=Show[tab3,tabl,s1,s3]

$$\varepsilon 3[t\_]=\frac{t}{Y^2[t]}\partial_t Y^2[t];$$

Print["Analiticka zavisnost ε3(t) nove funkcije q3(t):"];
Print["ε3=", ε 3[t]]
Print["Vrednost ε3:"];
vred ε3=SetPrecision[Table[ε3[t],{t,1,T,1}],8];
Print["ε3=",vred ε3]
Yia3=Table[y2[X[[n]]],{n,1,nn}];
Print["Standardna greska regresije Sq3 nove funkcije ","q3(t)=",q3[t]," :"];

$$sy1=SetPrecision\left[\sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{nn}(Y[[n]]-Yia3[[n]])^2}{nn}},8\right];$$

Print["Sq3=",sy1];
Print["Srednja vrednost (qsr3) obima proizvodnje (q) u oblasti eksperimenta:"];

$$Ysr1=\frac{\sum_{n=1}^{nn}Y[[n]]}{nn};$$

Print["qsr3=",Ysr1];
Print["Koeficijent korelacije (Rtq3) nove funkcije ","q3(t)=",q3[t]," :"];

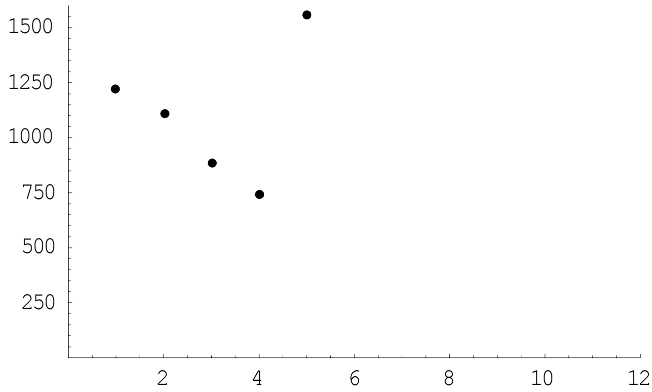
$$Rxy1=SetPrecision\left[\sqrt{1-\frac{\sum_{n=1}^{nn}(Y[[n]]-Yia3[[n]])^2}{\sum_{n=1}^{nn}(Y[[n]]-Ysr)^2}},8\right];$$

Print["Rtq3=",Rxy1];
Print["REKAPITULACIJA: KRIVOLINIJSKA EKSPONENCIJALNA REGRESIJA "];
Print["FUNKCIONALNA ZAVISNOST ","q",m,"(t):"];
q[t_]=a × b^{t};
Print["q",m,"(t)=",q[t]];
Print["q",m,"(t):",Table[q[t],{t,1,T,1}]];
Print["Sq",m, "=",sy];
Print["qsr",m, "=",Ysr];
Print["Rtq",m, "=",Rxy];
Print["ε",m,"(t):",vredε]
Print["FUNKCIONALNA ZAVISNOST ","t",m,"(q):"];
t[q_]=a1 b1^{q};
Print["t",m,"(q)=",t[q]];
Print["y2(t):",Table[y2[t],{t,1,T,1}]];

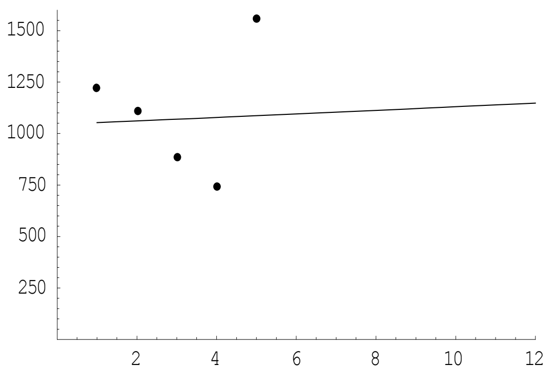
```
Print["za y2(t) sledi ","t",m,"(q):",Table[t[y2[a]],{a,1,T,1}]];
Print["q",m,"(t):",Table[q[t],{t,1,T,1}]];
Print["za q(t) sledi ","t",m,"(q):",Table[t[q[a]],{a,1,T,1}]];
Print["St",m, "=",Sx];
Print["tsr",m, "=",Xsr];
Print["Rqt",m, "=",Ryx];
Print["ε ",m,"(q):",vredε 1]
Print["FUNKCIONALNA ZAVISNOST ","p",m,"(t):"];
Print["p",m,"(t)=",y2[t]];
Print["p",m,"(t):",Table[y2[t],{t,1,T,1}]];
Print["Sp",m, "=",sy1];
Print["psr",m, "=",Ysr1];
Print["Rtp",m, "=",Rxy1];
Print["ε ",m,"(p):",vredε3]
KRAJ
```

REŠENJE:

Tacke u koordinatnom sistemu vreme - obim proizvodnje (t,q):

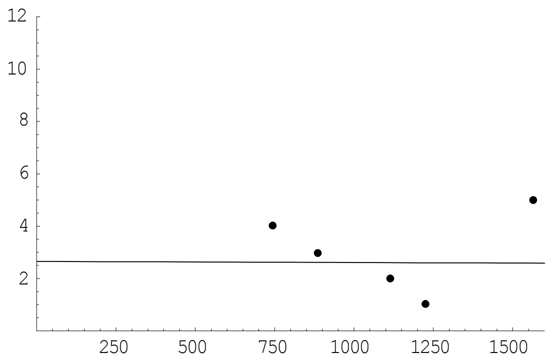


Kriva eksponencijalne regresija - analiticka zavisnost aproksimativne funkcije q(t):
$q(t)= 1044.9653\ 1.0078957485^t$
Tacke (t,q) i grafik funkcije $q(t)= 1044.9653\ 1.0078957485^t$:

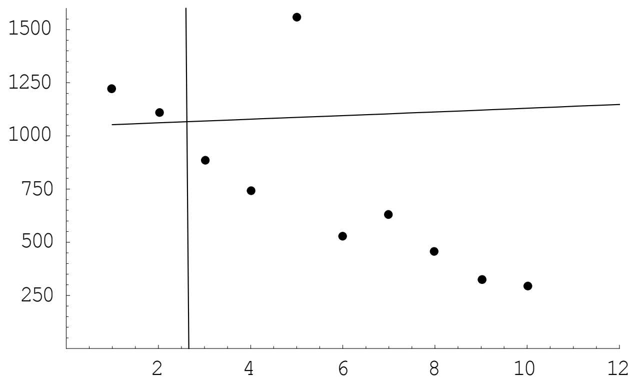


Standardna greska regresije Sq funkcije $q(t)= 1044.9653\ 1.0078957485^t$:
Sq= 284.503
Srednja vrednost obima proizvodnje(Y) u oblasti eksperimenta:
qsr= 1105.88
Koeficijent korelacije (Rtq) funkcije $q(t)= 1044.9653\ 1.0078957485^t$:
Rtq= 0.0697153
Analiticka zavisnost ε(t) funkcije $q(t)= 1044.9653\ 1.0078957485^t$:
$\varepsilon\ (t)= 0.00786474\ t$

Vrednost ε (t) za T vrednosti t=1,T,1:
ε (t) = {0.00786474, 0.01572948, 0.02359422, 0.03145896, 0.03932370, 0.04718844, 0.05505318, 0.06291792, 0.0707827, 0.0786474}
Aproksimativna kriva eksponencijalne regresije t(q):
$t(q)= 2.65144\ 0.999984^q$
Tacke (q,t) i grafik funkcije $t(q)= 2.65144\ 0.999984^q$



Standardna greska regresije (St) funkcije $t(q)= 2.65144\ 0.999984^q$:
St= 1.4700110
Srednja vrednost vremena (tsr) u oblasti eksperimenta:
tsr= 3
Koeficijent korelacije (Rqt) funkcije $t(q)= 2.65144\ 0.999984^q$:
Rqt= 0.28366553
Analiticka zavisnost ε(q) funkcije $t(q)= 2.65144\ 0.999984^q$:
ε (q)= -0.0000159203 q
Vrednost ε (q) za obim proizvodnje koji odgovar funkcijalnoj zavisnosti t(q) za t=1,T,1 :
ε (q)= {-0.97510429, -0.28195711, 0.12350799, 0.41119007, 0.63433362, 0.81665517, 0.97080585, 1.1043372, 1.2221203, 1.3274808}



4. ZAKLJUČAK

Prikazan kvantitativni model u sebi sintetizuje regresiju, korelaciju i ekstrapolaciju trenda kao polazište za utvrđivanje odgovarajućih zakonitosti i dalju primenu kvalitativnih metoda koje su sazivane na iskustvu i intuiciji.

LITERATURA

[1] Đukić R., Dobričić M., Đukić J., Projektovanje kvantitativnih modela za predviđanje stanja stohastičkih sistema, XI Internacionalni simpozijum iz projektnog menadžmenta, Zlatibor, 2007.
[2] Đukić R., Predviđanje i rangiranje mogućih trendova programske orjentacije, 32. Jupiter konferencija, Zlatibor, 2006.